Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 4

Abgabe: Montag, den 13. Mai 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 4.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper.

Erinnerung: Sei V ein K-Vektorraum und $T \in L(V,V)$. Für ein Polynom $f = \sum_{i=0}^n c_i x^i \in K[x]$ mit $c_i \in K$ definieren wir $f(T) \coloneqq \sum_{i=0}^n c_i T^i$, wobei $T^0 \coloneqq \mathrm{id}_V$ und $T^i \coloneqq T \circ T^{i-1}$ $(i \geq 1)$.

(a) Sei $T : K^3 \to K^3, T(x_1, x_2, x_3) \coloneqq (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$. Sei $f \in K[x]$ gegeben durch $f(x) = -x^3 + 2$. Berechnen Sie $f(T)(x_1, x_2, x_3)$ für alle $(x_1, x_2, x_3) \in K^3$.

Sei nun $h \in K[x]$ mit $\deg(h) \geq 1$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi_h : K[x] \to K[x], f = \sum_{i=0}^n c_i x^i \mapsto f(h) = \sum_{i=0}^n c_i h^i,$$

wobei $h^0 = 1, h^i = \underbrace{h \cdot \ldots \cdot h}_{i\text{-mal}} \in K[x]$ $(i \geq 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass φ_h linear und injektiv ist.

(c) Sei $f \in k[x]$. Zeigen Sie, dass $\deg(\varphi_h(f)) = \deg(f) \cdot \deg(h)$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass φ_h genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\deg(h) = 1$ gilt.

Aufgabe 4.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und betrachten Sie die Menge $\mathcal{B} = \{x^k : k \in \mathbb{N}_0\} \subseteq K[[x]]$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{B}$ ist eine Basis für $K[x]$.

(b) $\mathcal{B}$ ist keine Basis für $K[[x]]$.

Aufgabe 4.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein endlicher Körper.

(a) Sei $c \in K, c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $c^n = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$ existiert, sodass für alle $c \in K$ die Gleichheit $c^n = c$ gilt. Folgern Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : K[x] \to K[x]^\sim, f \mapsto \tilde{f}$$

von Polynomen auf Polynomfunktionen über endlichen Körpern nicht injektiv ist.

Aufgabe 4.4 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, $V \coloneqq K[x]_{\leq n}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und seien $t_0, \ldots, t_n \in K$ paarweise verschieden. Für alle $i = 0, \ldots, n$ definieren wir eine Abbildung $L_i \in V^*$ durch $L_i(f) \coloneqq f(t_i)$. Sei außerdem

$$P_i \coloneqq \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ die Gleichheit $L_i(P_j) = \delta_{ij}$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass $\{L_0, \ldots, L_n\}$ eine Basis von V^* und $\{P_0, \ldots, P_n\}$ eine Basis von V ist.